Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования **«Национальный исследовательский университет ИТМО»**

Факультет Программной Инженерии и Компьютерной Техники

Лабораторная работа **№3**

**«Численное интегрирование»**

по дисциплине «Вычислительная математика**»**

Вариант: **13**

**Преподаватель:**   
Наумова Надежда Александровна

**Выполнил:**

Саранча Павел Александрович

**Группа:** Р3209

Санкт-Петербург, 2025 г.

Цель работы: найти приближенное значение определенного интеграла с требуемой точностью различными численными методами.

# 1. Вычислительная реализация задачи

1. **Вычислить интеграл**, приведенный в таблице 1, **точно:**
2. **Вычислить интеграл по формуле Ньютона–Котеса** при :

[Решение с помощью WolframAlpha](https://www.wolframalpha.com/input?i2d=true&i=%5C%2840%29%5C%2840%293%5C%2841%29-%5C%2840%291%5C%2841%29%5C%2841%29%C3%97%5C%2840%29Divide%5B41%2C840%5D+f%5C%2840%291%5C%2841%29%2BDivide%5B216%2C840%5D+f%5C%2840%29Divide%5B4%2C3%5D%5C%2841%29%2BDivide%5B27%2C840%5D+f%5C%2840%29Divide%5B5%2C3%5D%5C%2841%29%2BDivide%5B272%2C840%5D+f%5C%2840%292%5C%2841%29%2BDivide%5B27%2C840%5D+f%5C%2840%29Divide%5B7%2C3%5D%5C%2841%29%2BDivide%5B216%2C840%5D+f%5C%2840%29Divide%5B8%2C3%5D%5C%2841%29%2BDivide%5B41%2C840%5Df%5C%2840%293%5C%2841%29%5C%2841%29+with+f%5C%2840%29x%5C%2841%29+%3D+-2Power%5Bx%2C3%5D+-+5Power%5Bx%2C2%5D+%2B+7x+-+13)

1. **Вычислить интеграл по формулам средних прямоугольников, трапеций и Симпсона** при :

* **Метод средних прямоугольников**:

[Решение с помощью WolframAlpha](https://www.wolframalpha.com/input?i2d=true&i=0.2%5C%2840%29f%5C%2840%291%2B0.1%5C%2841%29%2Bf%5C%2840%291%2B0.3%5C%2841%29%2Bf%5C%2840%291%2B0.5%5C%2841%29%2Bf%5C%2840%291%2B0.7%5C%2841%29%2Bf%5C%2840%291%2B0.9%5C%2841%29%2Bf%5C%2840%291%2B1.1%5C%2841%29%2Bf%5C%2840%291%2B1.3%5C%2841%29%2Bf%5C%2840%291%2B1.5%5C%2841%29%2Bf%5C%2840%291%2B1.7%5C%2841%29%2Bf%5C%2840%291%2B1.9%5C%2841%29%5C%2841%29+with+f%5C%2840%29x%5C%2841%29+%3D+-2Power%5Bx%2C3%5D+-+5Power%5Bx%2C2%5D+%2B+7x+-+13)

* **Метод трапеций**:

[Решение с помощью WolframAlpha](https://www.wolframalpha.com/input?i2d=true&i=0.2%5C%2840%29Divide%5B%5C%2840%29f%5C%2840%291%5C%2841%29%2Bf%5C%2840%293%5C%2841%29%5C%2841%29%2C2%5D%2B+f%5C%2840%291%2B0.2%5C%2841%29%2B+f%5C%2840%291%2B0.4%5C%2841%29%2B+f%5C%2840%291%2B0.6%5C%2841%29%2B+f%5C%2840%291%2B0.8%5C%2841%29%2B+f%5C%2840%291%2B1%5C%2841%29%2B+f%5C%2840%291%2B1.2%5C%2841%29%2B+f%5C%2840%291%2B1.4%5C%2841%29%2B+f%5C%2840%291%2B1.6%5C%2841%29%2B+f%5C%2840%291%2B1.8%5C%2841%29%5C%2841%29+with+f%5C%2840%29x%5C%2841%29+%3D+-2Power%5Bx%2C3%5D+-+5Power%5Bx%2C2%5D+%2B+7x+-+13)

* **Метод Симпсона**:

[Решение с помощью WolframAlpha](https://www.wolframalpha.com/input?i=0.2%2F3+%28f%281%29%2B4*%28f%281%2B0.2%29%2Bf%281%2B0.6%29%2Bf%281%2B1%29%2Bf%281%2B1.4%29%2Bf%281%2B1.8%29%29%2B2*%28f%281%2B0.4%29%2Bf%281%2B0.8%29%2Bf%281%2B1.2%29%2B+f%281%2B1.6%29%29%2Bf%283%29%29+with+f%28x%29+%3D+-2x%5E3+-+5x%5E2+%2B+7x+-+13)

1. **Сравнить результаты с точным значением интеграла:**

Точное значение интеграла на интервале вычислено как

1. Для метода **Ньютона–Котеса** при : , **значения совпадают**.
2. Для метода **средних прямоугольников** при : .
3. Для метода **трапеций** при : .
4. Для метода **Симпсона** при : , **значения совпадают**.
5. **Определить относительную погрешность вычислений для каждого метода.**
6. Для метода **Ньютона–Котеса**: **погрешности нет.**
7. Для метода **средних прямоугольников**:
8. Для метода **трапеций**:
9. Для метода **Симпсона**: **погрешности нет.**

Как видно из результатов, все методы дали относительно малую погрешность, особенно при использовании формулы Ньютона–Котеса и Симпсона. Наилучший результат был получен при использовании формулы Ньютона–Котеса с и формулы Симпсона с , при которых значения интеграла полностью совпали.

# 2. Программная реализация задачи

<https://github.com/PaulLocust/comp_math_lab3>

**Листинг методов:**

1 | **def** rectangle\_left(func, a, b, n):

2 |     """

3 |    Метод левых прямоугольников для численного интегрирования.

4 | ​

5 |    :param func: функция, которую нужно проинтегрировать

6 |    :param a: нижний предел

7 |    :param b: верхний предел

8 |    :param n: количество разбиений

9 |    :return: приближенное значение интеграла

10|    """

11|     h = (b - a) / n

12|     result = 0

13|     **for** i **in** range(n):

14|         x = a + i \* h

15|         result += func(x)

16|     **return** result \* h

17| ​

18| ​

19| **def** rectangle\_right(func, a, b, n):

20|     """

21|    Метод правых прямоугольников для численного интегрирования.

22| ​

23|    :param func: функция, которую нужно проинтегрировать

24|    :param a: нижний предел

25|    :param b: верхний предел

26|    :param n: количество разбиений

27|    :return: приближенное значение интеграла

28|    """

29|     h = (b - a) / n

30|     result = 0

31|     **for** i **in** range(1, n + 1):

32|         x = a + i \* h

33|         result += func(x)

34|     **return** result \* h

35| ​

36| ​

37| **def** rectangle\_middle(func, a, b, n):

38|     """

39|    Метод средних прямоугольников для численного интегрирования.

40| ​

41|    :param func: функция, которую нужно проинтегрировать

42|    :param a: нижний предел

43|    :param b: верхний предел

44|    :param n: количество разбиений

45|    :return: приближенное значение интеграла

46|    """

47|     h = (b - a) / n

48|     result = 0

49|     **for** i **in** range(n):

50|         x = a + (i + 0.5) \* h

51|         result += func(x)

52|     **return** result \* h

1 | **def** simpson\_rule(func, a, b, n):

2 |     """

3 |    Метод Симпсона для численного интегрирования.

4 | ​

5 |    :param func: функция, которую нужно проинтегрировать

6 |    :param a: нижний предел

7 |    :param b: верхний предел

8 |    :param n: количество разбиений (должно быть чётным)

9 |    :return: приближенное значение интеграла

10|    """

11|     **if** n % 2 != 0:

12|         **raise** ValueError("Количество разбиений n должно быть чётным для метода Симпсона.")

13| ​

14|     h = (b - a) / n

15|     result = func(a) + func(b)

16| ​

17|     # Суммируем все элементы с коэффициентами

18|     **for** i **in** range(1, n):

19|         coef = 3 + (-1) \*\* (i + 1)

20|         x = a + i \* h

21|         result += coef \* func(x)

22| ​

23|     **return** result \* h / 3

24| ​

1 | **def** trapezoid\_rule(func, a, b, n):

2 |     """

3 |    Метод трапеций для численного интегрирования.

4 | ​

5 |    :param func: функция, которую нужно проинтегрировать

6 |    :param a: нижний предел

7 |    :param b: верхний предел

8 |    :param n: количество разбиений

9 |    :return: приближенное значение интеграла

10|    """

11|     h = (b - a) / n

12|     result = (func(a) + func(b)) / 2  # Начальные значения на концах отрезка

13| ​

14|     # Суммируем значения функции в серединах трапеций

15|     **for** i **in** range(1, n):

16|         x = a + i \* h

17|         result += func(x)

18| ​

19|     **return** result \* h

**Результаты выполнения программы при различных исходных данных:**

1 | Выберите функцию для интегрирования:

2 | 1. x^2

3 | 2. sin(x)

4 | 3. e^x

5 | 4. 1/x^2

6 | 5. 1/x

7 | 6. 1/sqrt(x)

8 | 7. -2x^3 - 5x^2 + 7x - 13

9 | 8. 10

10| 9. 1 / sqrt(2x - x^2)

11| Ваш выбор: 7

12| Введите начальный предел интегрирования (a): 1

13| Введите конечный предел интегрирования (b): 3

14| Введите требуемую точность вычислений: 0.0001

15| ​

16| Выберите метод интегрирования:

17| 1. Метод левых прямоугольников

18| 2. Метод правых прямоугольников

19| 3. Метод средних прямоугольников

20| 4. Метод трапеций

21| 5. Метод Симпсона

22| Ваш выбор: 5

23| ​

24| Метод: simpson

25| Значение интеграла: -81.33333333333333

26| Число разбиений для достижения требуемой точности: n = 8

27| ​

28| Хотите попробовать ещё раз? [y/n]:

1 | Выберите функцию для интегрирования:

2 | 1. x^2

3 | 2. sin(x)

4 | 3. e^x

5 | 4. 1/x^2

6 | 5. 1/x

7 | 6. 1/sqrt(x)

8 | 7. -2x^3 - 5x^2 + 7x - 13

9 | 8. 10

10| 9. 1 / sqrt(2x - x^2)

11| Ваш выбор: 5

12| Введите начальный предел интегрирования (a): -1

13| Введите конечный предел интегрирования (b): 1

14| Обнаружены точки разрыва: [0.0].

15| - Интеграл не существует: функция не сходится на разрывах.

16| ​

17| Хотите попробовать ещё раз? [y/n]:

1 | Выберите функцию для интегрирования:

2 | 1. x^2

3 | 2. sin(x)

4 | 3. e^x

5 | 4. 1/x^2

6 | 5. 1/x

7 | 6. 1/sqrt(x)

8 | 7. -2x^3 - 5x^2 + 7x - 13

9 | 8. 10

10| 9. 1 / sqrt(2x - x^2)

11| Ваш выбор: 5

12| Введите начальный предел интегрирования (a): 1

13| Введите конечный предел интегрирования (b): 2

14| Введите требуемую точность вычислений: 0.001

15| ​

16| Выберите метод интегрирования:

17| 1. Метод левых прямоугольников

18| 2. Метод правых прямоугольников

19| 3. Метод средних прямоугольников

20| 4. Метод трапеций

21| 5. Метод Симпсона

22| Ваш выбор: 1

23| ​

24| Метод: rectangle\_left

25| Значение интеграла: 0.694124696732443

26| Число разбиений для достижения требуемой точности n = 256

27| Хотите попробовать ещё раз? [y/n]:

1 | Выберите функцию для интегрирования:

2 | 1. x^2

3 | 2. sin(x)

4 | 3. e^x

5 | 4. 1/x^2

6 | 5. 1/x

7 | 6. 1/sqrt(x)

8 | 7. -2x^3 - 5x^2 + 7x - 13

9 | 8. 10

10| 9. 1 / sqrt(2x - x^2)

11| Ваш выбор: 9

12| Введите начальный предел интегрирования (a): 0

13| Введите конечный предел интегрирования (b): 2

14| Обнаружены точки разрыва: [0.0, 2.0].

15| + Интеграл существует: функция сходится на разрывах.

16| Введите требуемую точность вычислений: 0.01

17| ​

18| Выберите метод интегрирования:

19| 1. Метод левых прямоугольников

20| 2. Метод правых прямоугольников

21| 3. Метод средних прямоугольников

22| 4. Метод трапеций

23| 5. Метод Симпсона

24| Ваш выбор: 5

25| ​

26| Метод: simpson

27| Значение интеграла: 3.230894059122111

28| Число разбиений для достижения требуемой точности: n = 2048

29| Хотите попробовать ещё раз? [y/n]:

# Вывод

В ходе выполнения лабораторной работы были изучены численные методы интегрирования с использованием Python. В результате работы были рассмотрены различные численные методы вычисления определенных интегралов: метод прямоугольников (левых, правых, средних), метод трапеций, метод Ньютона-Котеса и метод Симпсона.

Была реализована программа, позволяющая выбрать одну из предложенных функций, задать пределы интегрирования, точность и начальное значение числа разбиения интервала интегрирования.

Были рассчитаны интегралы различными методами.

Выполнена дополнительная задача по установлению сходимости рассматриваемых несобственных интегралов 2 рода и их вычислению заданными численными методами в случаях, когда подынтегральная функция терпит бесконечный разрыв в точке a, в точке b или на отрезке интегрирования.